Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 24, N. 1, 63-88

Surfaces non-orientables de genre deux

M. Elisa G. G. de Oliveira and Eric Toubiana

Abstract. The existence of nonorientable complete minimal surface of genus two, one end and total curvature $-2\pi(2n+3)$, $n \geq 3$ is proved in this paper.

1. Introduction

On connait actuellement un très grand nombre de surfaces minimales complètes (s.m.c.) plongées ou immergées dans $\mathbb{R}^3$; en particulier pour tout entier g on connait des s.m.c. de courbure totale finie de genre g plongées dans $\mathbb{R}^3$. Par contre il y a peu de temps encore on ne connaissait que des s.m.c. non-orientables de genre zéro (nous dirons qu'une surface non-orientable N est de genre g si son revêtement des orientations $\tilde{N}$ est de genre g): W. Meeks [4] a montré qu'il n'existe qu'une s.m.c. non-orientable de courbure totale -6π et plus généralement M.E. de Oliveira [5] a montré l'existence de s.m.c. non-orientables de courbure totale $-2\pi n$ pour tout entier n supérieur ou égal a trois, tous ces exemples sont paramétrés par le plan projectif moins un point, $P^2 - \{0\}$.

A. Barros [1] a généralisé les résultats de M. E. de Oliveira [5] sur les s.m.c. non-orientables de genre zéro avec deux et trois bouts. X. Zhang [7] a obtenu des résultats sur les s.m.c. non-orientables paramétrées par le plan projectif moins deux points, $P^2 - \{a, b\}$. E. Toubiana [6] a montré l'existence d'une famille de s.m.c. non-orientables de courbure totale -10π paramétrées par $P^2 - \{0, 1\}$ et T. Ishihara [2] a donné une classification des s.m.c. non-orientables de courbure totale -10π paramétrées par le plan projectif moins un point.

Ce n'est que récemment que T. Ishihara [3] a montré l'existence

Received 8 May 1992.

de s.m.c. non-orientables de genre un: elles sont paramétrées par la bouteille de Klein moins un point, $K^2 - \{a\}$ et elles sont de courbure totale $-2\pi(2n+2)$, $n \geq 3$. Dans le même temps, E. Toubiana [**6**] a construit des s.m.c. non-orientables de genre g pour tout entier g, elles sont obtenues comme revêtement de s.m.c. non-orientables de genre zéro.

Dans ce travail nous allons montrer l'existence de s.m.c. non-orientables de genre 2. Plus précisément nous allons montrer le résultat suivant:

Théorème 1. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, il existe une surface minimal complète non-orientable de genre deux dans $\mathbb{R}^3$ à un bout et de courbure totale $-2\pi(2n+3)$.*

Remarques. Nous empruntons à T. Ishihara [**3**] quelques techniques qu'il a utilisées pour l'étude des surfaces minimales complètes non-orientables de genre un. Remarquons que les méthodes utilisées ici peuvent s'appliquer également pour prouver l'existence de surfaces de genre un.

Lemme. (**Définition des s.m.c. non-orientables.**) *Une surface minimal N est non-orientable si et seulement si la pair (g, η) de la représentation de Weierstrass de la surface double $\tilde{N}$ vérifie les conditions:*
(i) $g(I(z)) = -1/\overline{g(z)}$;
(ii) $I^*(\eta) = -\overline{g^2\eta}$.
où $I : \tilde{N} \to \tilde{N}$ est une involution anti-conforme sans points fixes.

On peut trouver une démonstration du Lemme dans [**4**] ou [**5**].

2. Démonstration du théorème 1

Soit S la surface de Riemann définie par l'équation algébrique suivante:

$$\omega^2 = (z^2-1)(k_1^2z^2-1)(k_2^2z^2-1),$$

où ω, z sont dans $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et k_1, k_2 sont des réels vérifiant

$$0 < k_2 < k_1 < 1.$$

Il est connu que S est une surface de genre deux.

Nous remarquons que l'application définie de S dans S par

$$I(z,\omega) = (-\bar{z},\bar{\omega}),$$

est une involution anti-conforme de S, sans point fixe et de ce fait le quotient (S/I) est une surface non-orientable de genre deux.

De manière analogue à [**3**] on peut démontrer que la représentation de Weierstrass d'une s.m.c. non-orientable à un bout paramétrée par $M = (S/I) - (\infty,\infty)$ doit être de la forme suivante:

$$\begin{cases} g(z,\omega) = k_1 k_2 A \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)(z-1)(z-1/k_1)(z-1/k_2)}{\omega \prod_{j=1}^{n}(z+\bar{b}_j)} \\ \eta = B \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(z+\bar{b}_j)^2(z+1)(z+1/k_1)(z+1/k_2)}{\omega} dz = f(z,\omega)dz \end{cases}$$

avec $A, B, b_j \in \mathbb{C}$.

Un calcul montre que (g,η) vérifient les conditions du lemme si et seulement si:

$$A\bar{A} = 1 \text{ et } \; AB \in i\mathbb{R}.$$

Remarquons que si les b_j vérifient

$$b_i \neq -\bar{b}_j, \; i,j = 1,\dots n,$$

g est une fonction méromorphe sur S de degrée $2n+3$, en ce cas si (g,η) définit une surface minimale non-orientable celle-ci sera de courbure totale $-2\pi(2n+3)$.

Nous allons montrer maintenant que pour k_1 près de un et k_2 près de zéro (g,η) définit une surface minimal, pour cela il suffit de montrer les relations suivantes:

$$\forall \gamma \in \pi_1(M), \; \int_\gamma \eta = \overline{\int_\gamma \eta g^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re} \int_\gamma g\eta = 0. \tag{\#}$$

Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les chemins sur M définis par:

$$\beta_1(t) = (1/k_1 - 1)t + 1,$$
$$\beta_2(t) = (1/k_2 - 1/k_1)t + 1/k_1,$$
$$\beta_3 = 2t - 1, \quad t \in [0,1].$$

Considérons les courbes de Jordan

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} (\beta_j(2t), \omega(\beta_j(2t)), & t \in [0,1/2] \\ (\beta_j(-2t+2), -\omega(\beta_j(-2t+2)), & t \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Nous remarquons que $\gamma_1, \gamma_2, I(\gamma_1), I(\gamma_2)$ engendrent $\pi_1(M)$, mais à cause des relations du lemme nous avons

$$\int_{I(\gamma_j)} \eta = \int_{\gamma_j} I^*(\eta) = -\overline{\int_{\gamma_j} g^2\eta}$$

et

$$\int_{I(\gamma_j)} g^2\eta = \int_{\gamma_j} I^*(g^2\eta) = -\overline{\int_{\gamma_j} \eta},$$

donc:

$$\int_{\gamma_j} \eta = \overline{\int_{\gamma_j} (g^2\eta)} \Leftrightarrow \int_{I(\gamma_j)} \eta = \overline{\int_{I(\gamma_j)} g^2\eta}.$$

De plus si γ_0 est une courbe de Jordan dans $S-(\pm\infty, \pm\infty)$ homotope au point (∞, ∞), nous avons

$$[\gamma_0] = \pm[\gamma_2] \pm [\gamma_3] \pm [I(\gamma_2)],$$

où les signes dépendent de l'orientation des courbes $\gamma_j, j = 0, 2, 3$.

De ce fait il suffit de montrer (#) seulement pour les courbes γ_1, γ_2, γ_3. Remarquons pour cela que comme

$$g\eta = \frac{AB}{k_1k_2} \prod_1^n (z - b_j)(z + \bar{b}_j)dz$$

nous avons

$$\int_{\gamma_j} g\eta = \int_{\beta_j} g\eta - \int_{\beta_j} g\eta = 0,$$

car $g\eta$ ne contient pas de termes en ω.

De plus:

$$\int_{\gamma_j} \eta = 2\int_{\beta_j} \eta, \ \int_{\gamma_j} g^2\eta = 2\int_{\beta_j} g^2\eta, \quad j = 1,2,3,$$

car η et $g^2\eta$ sont des multiples de ω.

Il suffit donc de montrer que

$$\int_{\beta_j} \eta = \int_{\beta_j} g^2\eta, \ j = 1, 2, 3,$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} \eta = \overline{\int_{-1}^{1} g^2\eta} \tag{1}$$

$$\int_{1}^{1/k_1} \eta = \overline{\int_{1}^{1/k_1} g^2\eta} \tag{2}$$

$$\int_{1/k_1}^{1/k_2} \eta = \overline{\int_{1/k_1}^{1/k_2} g^2\eta} \tag{3}$$

et comme

$$g^2\eta = -\bar{B}\frac{\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)^2(z-1)(z-1/k_1)(z-1/k_2)}{\omega}dz,$$

$$A\bar{A} = 1 \text{ et } AB \in i\mathbb{R},$$

nous voulons

$$\begin{aligned}\int_{\beta_j} \frac{\prod_{j=1}^{n}(z+\bar{b}_j)^2(z+1)(z+1/k_1)(z+1/k_2)}{\omega}dz = \\ -\int_{\beta_j}\frac{\prod_{j=1}^{n}(z-\bar{b}_j)^2(z-1)(z-1/k_1)(z-1/k_2)}{\overline{\omega}}dz\end{aligned} \tag{E}$$

pour $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bien choisis.

Nous avons $\omega^2 = (z^2-1)(k_1^2z^2-1)(k_2^2z^2-1)$, donc,

$$\begin{array}{llllllll} z \in]-1,1[& \Rightarrow & \omega^2 < 0 & \Rightarrow & \omega \in i\mathbb{R} & \Rightarrow & \bar{\omega} = -\omega; \\ z \in]1, k_1[& \Rightarrow & \omega^2 > 0 & \Rightarrow & \omega \in \mathbb{R} & \Rightarrow & \bar{\omega} = \omega; \\ z \in]1/k_1, 1/k_2[& \Rightarrow & \omega^2 < 0 & \Rightarrow & \omega \in i\mathbb{R} & \Rightarrow & \bar{\omega} = -\omega. \end{array}$$

Notons $S_1, \dots, S_n$ les fonctions symétriques des $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$, i. e. les $\bar{b}_j$ sont les racines de l'équation:

$$X^n - S_1 X^{n-1} + S_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n S_n = 0,$$

et posons $S_0 = 1$. En développant pour $j = 1, 2, 3$ l'équation (E) et en notant:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^{1/k_1} \frac{z^n}{\omega}\, dz \quad , n \in \mathbb{N}, \\
I'_n &= \int_{1/k_1}^{1/k_2} \frac{z^n}{\omega}\, dz \quad , n \in \mathbb{N}, \\
I''_n &= \int_0^1 \frac{z^n}{\omega}\, dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{z^n}{\omega}\, dz \quad , n \in \mathbb{N} \textit{ et } n \textit{ pair},
\end{aligned}$$

nous obtenons le système d'équations (T) défini par les équations (1), (2) et (3) suivantes:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} S_k^2 [I_{2n+3-2k} + (a+b) I_{2n+1-2k}] \\
&\qquad + 2 \sum_{\substack{p+q \equiv 0(2) \\ 0 \leq p < q \leq n}} S_p S_q [I_{2n+3-p-q} + (a+b) I_{2n+1-p-q}] \\
&\qquad + 2 \sum_{\substack{p+q \equiv 1(2) \\ 0 \leq p < q \leq n}} S_p S_q [(1+b) I_{2n+2-p-q} + a I_{2n-p-q}] = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} S_k^2 [(1+b) I'_{2n+2-2k} + a I'_{2n-2k}] \\
&\qquad + 2 \sum_{\substack{p+q \equiv 0(2) \\ 0 \leq p < q \leq n}} S_p S_q [(1+b) I'_{2n+2-p-q} + a I'_{2n-p-q}] \\
&\qquad + 2 \sum_{\substack{p+q \equiv 1(2) \\ 0 \leq p < q \leq n}} S_p S_q [I'_{2n+3-p-q} + (a+b) I'_{2n+1-p-q}] = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_k^2[(1+b)I''_{2n+2-2k} + aI''_{2n-2k}]\\ +2\sum_{\substack{p+q\equiv 0(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_pS_q[(1+b)I''_{2n+2-p-q} + aI''_{2n-p-q}]\\ +2\sum_{\substack{p+q\equiv 1(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_pS_q[I''_{2n+3-p-q} + (a+b)I''_{2n+1-p-q}] = 0\end{aligned} \tag{3}$$

avec $b = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$, et $a = \dfrac{1}{k_1k_2}$.

En considérant (1), (2) et (3) comme un système de trois équations où les variables sont S_n, S_{n-1}, S_{n-2} et $S_{n-3}, \ldots, S_1$ sont des paramètres complexes, nous allons montrer que pour toutes valeurs complexes de $S_{n-3}, \cdots, S_1$ les équations (1), (2) et (3) possèdent au moins une solution commune (S_n, S_{n-1}, S_{n-2}).

Pour ceci nous avons besoin des estimations suivantes de I_n, I'_n, I''_n pour k_1 au voisinage de 1.

Lemme 1. *Pour chaque entier n nous avons*

$$I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k_2^2}} + o(1)$$

$$I_{2n+1} = I_1 + O(k_1 - 1),$$

$$I'_{2n} = I'_0 + f'_{2n} + o(1),$$

où

$$f'_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_1^{1/k_2} \frac{z^{2k}}{\sqrt{1-k_2^2z^2}}\, dz$$

$$I''_{2n} = I''_0 + f''_{2n} + o(1),$$

où

$$f''_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1} \frac{z^{2k}}{\sqrt{1-k_2^2z^2}}\, dz$$

$o(1)$ désigne ici une fonction qui tend vers zéro lorsque k_1 tend vers 1 et $O(k_1-1)$ désigne une fonction telle que $\dfrac{O(k_1-1)}{k_1-1}$ reste borné lorsque

k_1 *tend vers 1.*

De plus, $I'_0 O(k_1 - 1) = o(1)$ *et* $I''_0 O(k_1 - 1) = o(1)$.

Nous avons, en particulier:

$$
\begin{aligned}
f'_0 &= 0,\\
f'_2 &= \frac{\pi}{2k_2} - \frac{1}{k_2}\arcsin k_2\\
f'_4 &= \frac{1}{2k_2^2}\sqrt{1-k_2^2} + \left(\frac{1}{4k_2^3} + \frac{1}{2k_2}\right)\pi - \left(\frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2\\
f'_6 &= \left(\frac{3}{8k_2^4} + \frac{3}{4k_2^2}\right)\sqrt{1-k_2^2} + \left(\frac{3}{16k_2^5} + \frac{1}{4k_2^3} + \frac{1}{2k_2}\right)\pi\\
&\quad - \left(\frac{3}{8k_2^5} + \frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2\\
f'_8 &= \left(\frac{5}{16k_2^6} + \frac{7}{12k_2^4} + \frac{11}{12k_2^2}\right)\sqrt{1-k_2^2}\\
&\quad + \left(\frac{5}{32k_2^7} + \frac{3}{16k_2^5} + \frac{1}{4k_2^3} + \frac{1}{2k_2}\right)\pi\\
&\quad - \left(\frac{5}{16k_2^7} + \frac{3}{8k_2^5} + \frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2\\
f''_0 &= 0,\\
f''_2 &= -\frac{1}{k_2}\arcsin k_2\\
f''_4 &= \frac{1}{2k_2^2}\sqrt{1-k_2^2} - \left(\frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2\\
f''_6 &= \left(\frac{3}{8k_2^4} + \frac{3}{4k_2^2}\right)\sqrt{1-k_2^2} - \left(\frac{3}{8k_2^5} + \frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2\\
f''_8 &= \left(\frac{5}{16k_2^6} + \frac{7}{12k_2^4} + \frac{11}{12k_2^2}\right)\sqrt{1-k_2^2}\\
&\quad - \left(\frac{5}{16k_2^7} + \frac{3}{8k_2^5} + \frac{1}{2k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right)\arcsin k_2
\end{aligned}
$$

Nous démontrerons le lemme 1 dans l'appendice.

A l'aide du lemme 1, les équations (1), (2) et (3) deviennent respectivement $(1)'$, $(2)'$ et $(3)'$, avec (nous utilisons le fait que $a = \frac{1}{k_2} + O(k_1 - 1)$ et $b = 1 + \frac{1}{k_2} + O(k_1 - 1)$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_k^2 &\left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_1 + O(k_1-1)\right] \\ &+ 2 \sum_{\substack{p+q\equiv 0(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_1 + O(k_1-1)\right] \\ &+ 2 \sum_{\substack{p+q\equiv 1(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_1 + O(k_1-1)\right] = 0\end{aligned} \tag{1'}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} S_k^2 \left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_0' + \left(2+\frac{1}{k_2}\right) f'_{2n+2-2k} + \frac{1}{k_2} f'_{2n-2k} + o(1)\right] \\ &+ 2\sum_{\substack{p+q\equiv 0(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_0' + \left(2+\frac{1}{k_2}\right) f'_{2n+2-p-q} + \frac{1}{k_2} f'_{2n-p-q} + o(1)\right] \\ &+ 2\sum_{\substack{p+q\equiv 1(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[\left(2+\frac{2}{k_2}\right) I_0' + f'_{2n+3-p-q} + \left(1+\frac{2}{k_2}\right) f'_{2n+1-p-q} + o(1)\right] = 0\end{aligned} \tag{2'}$$

et $(3)'$ comme $(2)'$ avec $''$ au lieu de $'$.

En remplaçant successivement $(2)'$ par $(2)' - \frac{I_0'}{I_1}(1)'$, $(3)'$ par $(3)' - \frac{I_0''}{I_1}(1)'$, puis divisant $(1)'$ par $(2+2/k_2)I_1$ nous obtenons (nous utilisons ici le fait que $I_0'\,O(k_1-1) = o(1)$, $I_0''\,O(k_1-1) = o(1)$ et $I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k_2^2}} + o(1)$):

$$\sum_{k=0}^{n} S_k^2 [1 + O(k_1-1)] + 2 \sum_{0\le p<q\le n} S_p S_q [1 + O(k_1-1)] = 0 \tag{1''}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_k^2 &\left[\left(2+\frac{1}{k_2}\right) f'_{2n+2-2k} + \frac{1}{k_2} f'_{2n-2k} + o(1)\right] \\ &+ 2 \sum_{\substack{p+q\equiv 0(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[\left(2+\frac{1}{k_2}\right) f'_{2n+2-p-q} + \frac{1}{k_2} f'_{2n-p-q} + o(1)\right] \\ &+ 2 \sum_{\substack{p+q\equiv 1(2)\\ 0\le p<q\le n}} S_p S_q \left[f'_{2n+3-p-q} + \left(1+\frac{2}{k_2}\right) f'_{2n+1-p-q} + o(1)\right] = 0\end{aligned} \tag{2}''$$

$(3)''$ comme $(2)''$, avec $''$ en lieu de $'$.

En considérant les combinaisons linéaires adéquates entre $(2)''$ et $(3)''$, plus précisément en remplaçant les équations $(2)''$ et $(3)''$ par (B) et (C), avec

$$(B) \Leftrightarrow \left[\frac{2k_2}{\pi} + (2+4k_2^2)\frac{\arcsin k_2}{\sqrt{1-k_2^2}}\right](2)'' - \left[\frac{2k_2}{\pi} - \frac{1+2k_2^2}{\sqrt{1-k_2^2}}\right](3)''$$

et

$$(C) \Leftrightarrow \left[\frac{3k_2}{2\pi} + (3-2k_2^2)\frac{\arcsin k_2}{2\sqrt{1-k_2^2}}\right](2)'' - \left[\frac{3k_2}{2\pi} - \frac{3-2k_2^2}{8\sqrt{1-k_2^2}}\right](3)''$$

nous obtenons:

$$\begin{aligned} a'_3 S_n^2 &+ a'_2 S_{n-1}^2 + a'_1 S_{n-2}^2 + 2a'_{23} S_n S_{n-1} + 2a'_{13} S_n S_{n-2} \\ &+ 2a'_{12} S_{n-1} S_{n-2} + 2b'_3 S_n + 2b'_2 S_{n-1} + 2b'_1 S_{n-2} \\ &+ \sum_{k=0}^{n-3} c'_k S_k^2 + 2 \sum_{0\le p<q\le n} d'_{pq} S_p S_q = 0 \end{aligned} \tag{B}$$

$$\begin{aligned} a''_3 S_n^2 &+ a''_2 S_{n-1}^2 + a''_1 S_{n-2}^2 + 2a''_{23} S_n S_{n-1} + 2a''_{13} S_n S_{n-2} \\ &+ 2a''_{12} S_{n-1} S_{n-2} + 2b''_3 S_n + 2b''_2 S_{n-1} + 2b''_1 S_{n-2} \\ &+ \sum_{k=0}^{n-3} c''_k S_k^2 + 2 \sum_{0\le p<q\le n} d''_{pq} S_p S_q = 0 \end{aligned} \tag{C}$$

avec, en particulier:

$$a'_1 = -\frac{1}{k_2^3} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{1}{2k_2} - 1 + o(1) \qquad a'_{12} = -\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{2} + o(1)$$
$$a'_2 = \frac{1}{k_2} + o(1) \qquad a'_{13} = \frac{1}{k_2} + o(1)$$
$$a'_3 = \frac{1}{k_2} + 2 + o(1) \qquad a'_{23} = \frac{2}{k_2} + 1 + o(1)$$

$$b'_1 = \left(-\frac{5}{6k_2^4} - \frac{2}{k_2^3} - \frac{31}{12k_2^2} - \frac{1}{k_2} - \frac{4}{3} + o(1)\right) S_{n-3}$$
$$+ P_1(S_{n-4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$
$$b'_2 = \left(-\frac{1}{k_2^3} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{1}{2k_2} - 1 + o(1)\right) S_{n-3} + P_2(S_{n-4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$
$$b'_3 = \left(-\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{2} + o(1)\right) S_{n-3} + P_3(S_{n-4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$

où P_1, P_2, P_3 sont dans $\mathbb{R}_1[S_{n-4}, \cdots, S_1]$.

Egalement:

$$a''_1 = \frac{17}{8k_2} + \frac{9}{4} + o(1) \qquad a''_{12} = \frac{2}{k_2} + \frac{17}{8} + o(1)$$
$$a''_2 = \frac{7}{4k_2} + 2 + o(1) \qquad a''_{13} = \frac{7}{4k_2} + 2 + o(1)$$
$$a''_3 = \frac{3}{4k_2} + \frac{3}{2} + o(1) \qquad a''_{23} = \frac{3}{2k_2} + \frac{7}{4} + o(1)$$

$$b''_1 = \left(-\frac{1}{48k_2^2} + \frac{9}{4k_2} - \frac{49}{8} + o(1)\right) S_{n-3} + Q_1(S_{n-4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$
$$b''_2 = \left(\frac{17}{8k_2} + \frac{9}{4} + o(1)\right) S_{n-3} + Q_2(S_{n-4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$
$$b''_3 = \left(\frac{2}{k_2} + \frac{17}{8} + o(1)\right) S_{n-3} + Q_3(S_{n_4}, \ldots, S_1), \; si\ n \geq 4$$

où Q_1, Q_2, Q_3 sont dans $\mathbb{R}_1[S_{n-4}, \cdots, S_1]$.

En effectuant:

$$[1 + O(k_1 - 1)](B) - a'_1(1)'' \quad \text{et} \quad [1 + O(k_1 - 1)](C) - a''_1(1)''$$

(où $[1+O(k_1-1)]$ est le coefficient de S_{n-2}^2 dans l'équation $(1)''$) nous obtenons, en appelant $X=S_{n-2}, Y=S_{n-1}, Z=S_n$:
$[1+O(k_1-1)](B)-a_1'(1)''$:

$$\begin{aligned}2X\{&[a_{12}'-a_1'+O(k_1-1)]Y+[a_{13}'-a_1'+O(k_1-1)]Z+b_1'-a_1'\\&+O(k_1-1)\}=-[a_2'-a_1'+O(k_1-1)]Y^2-[a_3'-a_1'+O(k_1-1)]Z^2\\&-2[a_{23}'-a_1'+O(k_1-1)]YZ-2[b_2'-a_1'+O(k_1-1)]Y\\&-2[b_3'-a_1'+O(k_1-1)]Z-[a_0'-a_1'+O(k_1-1)]\end{aligned}$$

$[1+O(k_1-1)](C)-a_1''(1)''$: comme $[1+O(k_1-1)](B)-a_1'(1)''$ avec $''$ au lieu de $'$.

En égalisant les deux expressions de S_{n-2} que nous venons de trouver puis en remplaçant dans $(1)''$ S_{n-2} par l'expression trouvée dans $[1+O(k_1-1)](B)-a_1'(1)''$, nous obtenons les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned}A_1Y^4&+A_2Z^4+A_3Y^3Z+A_4Y^2Z^2+A_5YZ^3+B_1Y^3\\&+B_2Z^3+B_3Y^2Z+B_4YZ^2+C_1Y^2+C_2Z^2\\&+C_3YZ+D_1Y+D_2Z+E=0\end{aligned}\tag{E_1}$$

et

$$\alpha Y^3+\beta Y^2+\gamma Y+\delta=0 \tag{E_2}$$

avec

$$\begin{aligned}A_1&=(a_2'-a_1')^2-4(a_2'-a_1')(a_{12}'-a_1')+4(a_{12}'-a_1')^2+O(k_1-1)\\A_2&=(a_3'-a_1')^2-4(a_3'-a_1')(a_{13}'-a_1')+4(a_{13}'-a_1')^2+O(k_1-1)\\A_3&=4(a_2'-a_1')(a_{23}'-a_1')-4(a_2'-a_1')(a_{13}'-a_1')\\&\quad-8(a_{23}'-a_1')(a_{12}'-a_1')-4(a_2'-a_1')(a_{12}'-a_1')\\&\quad+8(a_{12}'-a_1')(a_{13}'-a_1')+8(a_{12}'-a_1')^2+O(k_1-1)\\A_4&=2(a_2'-a_1')(a_3'-a_1')+4(a_{23}'-a_1')^2-4(a_3'-a_1')(a_{12}'-a_1')\\&\quad-8(a_{23}'-a_1')(a_{13}'-a_1')-4(a_2'-a_1')(a_{13}'-a_1')\\&\quad-8(a_{23}'-a_1')(a_{12}'-a_1')+4(a_{13}'-a_1')^2+4(a_{12}'-a_1')^2\\&\quad+16(a_{12}'-a_1')(a_{13}'-a_1')+O(k_1-1)\\A_5&=4(a_3'-a_1')(a_{23}'-a_1')-4(a_3'-a_1')(a_{13}'-a_1')-4(a_3'-a_1')(a_{12}'-a_1')\\&\quad-8(a_{23}'-a_1')(a_{13}'-a_1')+8(a_{12}'-a_1')(a_{13}'-a_1')\end{aligned}$$

$$+ 8(a'_{13} - a'_1)^2 + O(k_1 - 1)$$

$B_i, C_j, D_k, E \in \mathbb{R}[S_{n-3}, \ldots, S_1]$, $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, k = 1, 2,$

$$\begin{aligned}
\alpha &= (a''_{12} - a''_1)(a'_2 - a'_1) - (a'_{12} - a'_1)(a''_2 - a''_1) + O(k_1 - 1) \\
\beta &= [2(a''_{12} - a''_1)(a'_{23} - a'_1) + (a''_{13} - a''_1)(a'_2 - a'_1) - 2(a'_{12} - a'_1)(a''_{23} - a''_1) \\
&\qquad - (a'_{13} - a'_1)(a''_2 - a''_1)]Z + \beta_0(S_{n-3}, \ldots, S_1) + O(k_1 - 1) \\
\gamma &= [(a''_{12} - a''_1)(a'_3 - a'_1) + 2(a''_{13} - a''_1)(a'_{23} - a'_1) - (a'_{12} - a'_1)(a''_3 - a''_1) \\
&\qquad - 2(a'_{13} - a'_1)(a''_{23} - a''_1)]Z^2 + \gamma_1(S_{n-3}, \ldots, S_1)Z \\
&\qquad + \gamma_0(S_{n-3}, \ldots, S_1) + O(k_1 - 1) \\
\delta &= [(a''_{13} - a''_1)(a'_3 - a'_1) - (a'_{13} - a'_1)(a''_3 - a''_1)]Z^3 + \delta_2(S_{n-3}, \ldots, S_1)Z^2 \\
&\qquad + \delta_1(S_{n-3}, \ldots, S_1)Z + \delta_0(S_{n-3}, \ldots, S_1) + O(k_1 - 1)
\end{aligned}$$

avec $\beta_0, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}[S_{n-3}, \ldots, S_1]$.

En utilisant les expressions des a'_i, a''_j trouvées plus haut nous obtenons:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{k_2^6} - \frac{1}{k_2^4} + \frac{1}{4k_2^2} + o(1) \\
A_2 &= \frac{1}{k_2^6} + \frac{4}{k_2^5} + \frac{7}{k_2^4} + \frac{4}{k_2^3} - \frac{7}{4k_2^2} - \frac{3}{k_2} + 1 + o(1) \\
A_3 &= 4\left(\frac{1}{k_2^6} + \frac{1}{k_2^5} - \frac{1}{k_2^4} - \frac{1}{k_2^3} + \frac{1}{4k_2^2} + \frac{1}{4k_2} + o(1)\right) \\
A_4 &= \frac{6}{k_2^6} + \frac{12}{k_2^5} + \frac{2}{k_2^4} - \frac{12}{k_2^3} - \frac{9}{2k_2^2} + \frac{3}{k_2} + 1 + o(1) \\
A_5 &= 4\left(\frac{1}{k_2^6} + \frac{3}{k_2^5} + \frac{3}{k_2^4} - \frac{1}{k_2^3} - \frac{11}{4k_2^2} - \frac{1}{4k_2} + \frac{1}{2} + o(1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{4k_2^4} + \frac{1}{4k_2^3} + o(1) \\
\beta &= \left(\frac{1}{k_2^4} + \frac{3}{2k_2^3} + \frac{1}{2k_2^2}\right) Z + \beta_0(S_{n-3}, \ldots, S_1) \\
\gamma &= \left(\frac{7}{4k_2^4} + \frac{13}{4k_2^3} + \frac{2}{k_2^2} + \frac{1}{2k_2}\right) Z^2 + \gamma_1(S_{n-3}, \ldots S_1)Z + \gamma_0(S_{n-3}, \ldots S_1)
\end{aligned}$$

$$\delta = \left(\frac{1}{k_2^4} + \frac{5}{2k_2^3} + \frac{5}{2k_2^2} + \frac{1}{k_2}\right) Z^3 + \delta_2(S_{n-3}, \ldots S_1)Z^2$$
$$+ \delta_1(S_{n-3}, \ldots S_1)Z + \delta_0(S_{n-3}, \ldots S_1)$$

où $\beta_0, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}[S_{n-3}, \ldots S_1]$

Pour montrer que le système d'équations initial (T) en S_n, S_{n-1}, S_{n-2} possède une solution pour $n = 3$ (et pour toutes valeurs de $S_{n-3}, \ldots, S_1$, au cas où $n \geq 4$) il est équivalent de montrer que le système d'équations (E_1, E_2) possède toujours une solution (Z, Y) pour toutes valeurs de S_{n-3},S_{n-2}, ... , S_1.

Pour cela remarquons que pour toutes valeurs complexes de S_{n-3}, ..., S_1, l'équation (E_2) considérée comme une équation en Z et Y définit une surface de Riemann compacte M, appelons $(Z, Y(Z))$ les points de M, on peut donc considérer l'équation (E_1) comme une équation sur M du type

$$F(Z, Y(Z)) = 0$$

avec

$$F(Y, Z) = A_1Y^4 + A_2Z^4 + A_3Y^3Z + A_4Y^2Z^2 + A_5YZ^3 + B_1Y^3$$
$$+ B_2Z^3 + B_3Y^2Z + B_4YZ^2 + C_1Y^2 + C_2Z^2$$
$$+ C_3YZ + D_1Y + D_2Z + E$$

De ce fait si F n'est pas constante, F doit avoir des zéros sur M et le système d'équations (E_1, E_2) admet donc des solutions.

Montrons que la fonction F n'est pas constante sur M.

En posant $Y = U - \dfrac{\beta}{3\alpha}$, l'équation E_2 devient:

$$U^3 + pU + q = 0 \qquad (\$)$$

avec

$$\begin{cases} p = \dfrac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha^2} \\ q = \dfrac{2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2\delta}{27\alpha^3} \end{cases}$$

ainsi en posant

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{-27}{2}q - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-4p^3 - 27q^2}}$$
$$u_2 = \sqrt[3]{\frac{-27}{2}q + 3i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-4p^3 - 27q^2}}$$

où les racines cubiques sont choisies de telle manière que $u_1u_2 = -3p$, les solutions de ($) sont

$$U_1 = (u_1 + u_2)/3, \quad U_2 = (ju_1 + j^2u_2)/3, \quad U_3 = (j^2u_1 + ju_2)/3$$

où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Les solutions de (E_2) sont donc:

$$Y_j = U_j - \frac{\beta}{3\alpha}, j = 1, 2, 3,$$

c'est à dire

$$Y_1 = \left[\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} + 4\right) + O(k_2) + o(1)\right] Z + o(Z)$$
$$Y_2 = \left[\frac{1}{3}\left(j\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + j^2\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} + 4\right) + O(k_2) + o(1)\right] Z + o(Z)$$
$$Y_3 = \left[\frac{1}{3}\left(j^2\sqrt[3]{8 + 3\sqrt{21}} + j\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{21}} + 4\right) + O(k_2) + o(1)\right] Z + o(Z)$$

où $o(Z)$ désigne une fonction de Z telle que $\frac{o(Z)}{Z}$ tend vers zéro lorsque Z tend vers ∞ et $O(k_2^q)$ est une fonction de k_2 telle que $\frac{O(k_2^q)}{k_2^q}$ reste borné lorsque k_2 tend vers zéro.

Posons

$$Y_j = [\lambda_j + O(k_2) + o(1)]Z + o(Z), j = 1, 2, 3.$$

En remplaçant Y par Y_j dans la fonction $F(Z, Y(Z))$ et en considérant Z près de ∞, $F(Z, Y(Z))$ est équivalent à:

$$\begin{aligned} F(Z, Y(Z)) &\sim A_1Y_j^4 + A_3Y_j^3Z + A_4Y_j^2Z^2 + A_5Y_jZ^3 + A_2Z^4 \\ &\sim (A_1\lambda_j^4 + A_3\lambda_j^3 + A_4\lambda_j^2 + A_5\lambda_j + A_2)Z^4 \\ &\sim \left[(\lambda_j + 1)^4\frac{1}{k_2^6} + O\left(\frac{1}{k_2^5}\right) + o(1)\right] Z^4 \end{aligned}$$

Il est clair que $\lambda_j \neq -1$ pour $j = 1, 2, 3$ nous concluons de ceci que $F(Z, Y)$ n'est pas une fonction constante sur M dès que k_1 est assez proche de 1 et k_2 assez proche de zéro. Ceci montre que le système d'équations initial (T) possède des solutions pour $n = 3$ et possède également des solutions pour toutes les valeurs complexes de $S_{n-3}, \ldots, S_1$ dès que $n \geq 4$.

Il reste à montrer:

Proposition. *Il existe des solutions* $(S_1, \ldots, S_n)$ *au système d'équations initial* (T) *défini par les équations* (1), (2) *et* (3) *telles que les complexes* $b_1, \ldots b_n$ *obtenus à partir de* $(S_1, \ldots, S_n)$ *vérifient:*

$$b_j \in \mathbb{C} - i\mathbb{R} \qquad et \qquad b_i \neq -\bar{b}_j \ i, j = 1 \ldots n. \tag{$*$}$$

On observe que si l'une des ces deux conditions n'était pas vérifiée nous pourrions faire des simplifications dans le quotient définissant g:

$$g(z, \omega) = k_1 k_2 A \frac{\prod_{j=1}^{n} (z - b_j)(z - 1)(z - 1/k_1)(z - 1/k_2)}{\omega \prod_{j=1}^{n} (z + \bar{b}_j)}$$

ce qui diminuerait le degré de g et donc la courbure totale de S.

Pour cela nous montrerons d'abord les lemmes suivants:

Lemme 2. *Pour* $n = 1$ *le système d'équations initial* (T) *ne possède pas de solutions .*

Démonstration. En effet pour $n = 1$ nous avons un système de 3 équations à une inconnue $b_1 = S_1$:

$$S_1^2[I_3 + (a + b)I_1] + 2S_1[(1 + b)I_3 + aI_1] + I_5 + (a + b)I_3 = 0 \tag{1}$$

$$S_1^2[(1 + b)I'_2 + aI'_0] + 2S_1[I'_4 + (a + b)I'_2] + (1 + b)I'_4 + aI'_2 = 0 \tag{2}$$

$$S_1^2[(1 + b)I''_2 + aI''_0] + 2S_1[I''_4 + (a + b)I''_2] + (1 + b)I''_4 + aI''_2 = 0 \tag{3}$$

En éliminant S_1^2 dans les équations (2) et (3) nous obtenons:

$$2S_1 = \frac{[(1 + b)I''_4 + aI''_2][(1 + b)I'_2 + aI'_0] - [(1 + b)I'_4 + aI'_2][(1 + b)I''_2 + aI''_0]}{[I'_4 + (a + b)I'_2][(1 + b)I''_2 + aI''_0] - [I''_4 + (a + b)I''_2][(1 + b)I'_2 + aI'_0]}$$

nous en déduisons que S_1 doit être réel et donc S_1^2 doit être un réel positif, mais en éliminant S_1 dans les équations (2) et (3) nous obtenons:

$$S_1^2 = \frac{[(1+b)I_4'' + aI_2''][(I_4' + (a+b)I_2'] - [(1+b)I_4' + aI_2'][I_4'' + (a+b)I_2'']}{[I_4'' + (a+b)I_2''][(1+b)I_2' + aI_0'] - [I_4' + (a+b)I_2'][(1+b)I_2'' + aI_0'']}$$

$$S_1^2 = \frac{a(I_4'I_2'' - I_4''I_2') + (a+b)(1+b)(I_2'I_4'' - I_2''I_4')}{(1+b)(I_2'I_4'' - I_2''I_4') + a(I_0'I_4'' - I_0''I_4') + a(a+b)(I_0'I_2'' - I_0''I_2')},$$

or en examinant les domaines d'intégration des intégrales I_p' et I_p'' nous remarquons que pour tout entier positif n:

$$I_{2n+2}' > I_{2n}' \quad \text{et} \quad I_{2n+2}'' < I_{2n}'',$$

de ce fait

$$\frac{I_{2n+2}'}{I_{2n}'} > 1 > \frac{I_{2n+2}''}{I_{2n}''}$$

nous déduisons de ceci que le numérateur de S_1^2 est strictement positif alors que le dénominateur est strictement négatif. De ce fait S_1^2 est strictement négatif contredisant le fait que S_1 est réel.

Lemme 3. *Pour $n = 2$ le système d'équations initial (T) ne possède pas de solutions lorsque k_1 est assez proche de 1 et k_2 assez proche de zéro.*

Démonstration. Pour $n = 2$ nous avons un système de 3 équations à 2 inconnues S_1, S_2:

$$\begin{aligned} &S_2^2[I_3 + (a+b)I_1] + S_1^2[I_5 + (a+b)I_3] + 2S_1S_2[(1+b)I_3 + aI_1] \\ &\quad + 2S_2[I_5 + (a+b)I_3] + 2S_1[(1+b)I_5 + aI_3] + I_7 + (a+b)I_5 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &S_2^2[(1+b)I_2' + aI_0'] + S_1^2[(1+b)I_4' + aI_2'] + 2S_1S_2[I_4' + (a+b)I_2'] \\ &\quad + 2S_2[(1+b)I_4' + aI_2'] + 2S_1[I_6' + (a+b)I_4'] + (1+b)I_6' + aI_4' = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &S_2^2[(1+b)I_2'' + aI_0''] + S_1^2[(1+b)I_4'' + aI_2''] + 2S_1S_2[I_4'' + (a+b)I_2''] \\ &\quad + 2S_2[(1+b)I_4'' + aI_2''] + 2S_1[I_6'' + (a+b)I_4''] + (1+b)I_6'' + aI_4'' = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

En utilisant les estimations des intégrales I_p, I_p', I_p'' données au lemme 1 puis en effectuant les mêmes combinaisons linéaires entre les équations (1), (2) et (3), que celles effectuées plus haut nous obtenons:

$$\begin{aligned} &S_2^2[1 + O(k_1 - 1)] + S_1^2[1 + O(k_1 - 1)] + 2S_1S_2[1 + O(k_1 - 1)] \\ &\quad + 2S_2[1 + O(k_1 - 1)] + 2S_1[1 + O(k_1 - 1)] + 1 + O(k_1 - 1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$a'_3S_2^2 + a'_2S_1^2 + 2a'_{23}S_1S_2 + 2b'_3S_2 + 2b'_2S_1 + a'_0 = 0 \tag{2}$$

$$a''_3S_2^2 + a''_2S_1^2 + 2a''_{23}S_1S_2 + 2b''_3S_2 + 2b''_2S_1 + a''_0 = 0 \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned}
a'_3 &= \frac{1}{k_2} + 2 + o(1) & a'_2 &= \frac{1}{k_2} + o(1) \\
a'_{23} &= \frac{2}{k_2} + 1 + o(1) & a'_0 &= -\frac{1}{k_2^3} - \frac{2}{k_2^2} - \frac{1}{2k_2} - 1 + o(1) \\
b'_3 &= \frac{1}{k_2} + o(1) & b'_2 &= -\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{2} + o(1) \\
a''_3 &= \frac{3}{4k_2} + \frac{3}{2} + o(1) & a''_2 &= \frac{7}{4k_2} + 2 + o(1) \\
a''_{23} &= \frac{3}{2k_2} + \frac{7}{4} + o(1) & a''_0 &= \frac{17}{8k_2} + \frac{9}{4} + o(1) \\
b''_3 &= \frac{7}{4k_2} + 2 + o(1) & b''_2 &= \frac{2}{k_2} + \frac{17}{8} + o(1)
\end{aligned}$$

En effectuant: $[1 + O(k_1 - 1)](2) - a'_2(1)$ et $[1 + O(k_1 - 1)](3) - a''_2(1)$ nous obtenons

$[1 + O(k_1 - 1)](2) - a'_2(1)$:

$$S_1 = -\frac{[a'_3 - a'_2 + O(k_1 - 1)]S_2^2 + 2[b'_3 - a'_2 + O(k_1 - 1)]S_2 + a'_0 - a'_2 + O(k_1 - 1)}{2\{[a'_{23} - a'_2 + O(k_1 - 1)]S_2 + b'_2 - a'_2 + O(k_1 - 1)\}}$$

$[1 + O(k_1 - 1)](3) - a''_2(1)$:

$$S_1 = -\frac{[a''_3 - a''_2 + O(k_1 - 1)]S_2^2 + 2[b''_3 - a''_2 + O(k_1 - 1)]S_2 + a''_0 - a''_2 + O(k_1 - 1)}{2\{[a''_{23} - a''_2 + O(k_1 - 1)]S_2 + b''_2 - a''_2 + O(k_1 - 1)\}}$$

En égalisant les deux équations de S_1 puis en reportant la première expression de S_1 ($[1 + O(k_1 - 1)](2) - a'_2(1)$) dans l'équation (1) nous obtenons le système (T_1) suivant:

$$\begin{cases} AS_2^4 + BS_2^3 + CS_2^2 + DS_2 + E = 0 \\ \alpha S_2^3 + \beta S_2^2 + \gamma S_2 + \delta = 0 \end{cases} \tag{T_1}$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{4}{k_2^2} + o(1) & B &= 4\left(-\frac{2}{k_2^3} + \frac{1}{k_2}\right) + o(1) \\
C &= 4\left(\frac{2}{k_2^4} - \frac{3}{2k_2^2} + \frac{1}{4}\right) + o(1) & D &= 4\left(-\frac{1}{k_2^5} + \frac{1}{k_2^3}\right) + o(1) \\
E &= \frac{1}{k_2^6} - \frac{1}{k_2^4} + \frac{1}{4k_2^2} + o(1) & & \\
\alpha &= \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_2} + o(1) & \beta &= -\frac{1}{k_2^3} - \frac{3}{2k_2^2} - \frac{1}{2k_2} + o(1) \\
\gamma &= \frac{1}{4k_2^4} + \frac{3}{4k_2^3} + \frac{1}{2k_2^2} + o(1) & \delta &= -\frac{1}{4k_2^4} - \frac{1}{4k_2^3} + o(1).
\end{aligned}
$$

En procédant par élimination, on peut vérifier que le système (T_1) est équivalent au système suivant de deux équations à coefficients réels:

$$
\begin{cases} a_2 S_2^2 + a_1 S + a_0 = 0 \\ \alpha S_2^3 + \beta S_2^2 + \gamma S_2 + \delta = 0 \end{cases} \tag{T_2}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \alpha(\alpha C - A\gamma) - \beta(\alpha B - \beta A) = \frac{3}{k_2^8} + \frac{4}{k_2^7} + O\left(\frac{1}{k_2^6}\right) + o(1) \\
a_1 &= \alpha(\alpha D - A\delta) - \gamma(\alpha B - \beta A) = -\frac{3}{k_2^9} - \frac{7}{2k_2^8} + O\left(\frac{1}{k_2^7}\right) + o(1) \\
a_0 &= \alpha^2 E - \delta(\alpha B - \beta A) = \frac{1}{k_2^{10}} + \frac{1}{k_2^9} + O\left(\frac{1}{k_2^8}\right) + o(1)
\end{aligned}
$$

Le discriminant de la première équation de (T_2) est:

$$
\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2 = -\frac{3}{k_2^{18}} + O\left(\frac{1}{k_2^{17}}\right) + o(1)
$$

donc Δ est strictement négatif si k_2 est assez près de zéro, en ce cas la première équation de (T_2) admet deux racines distinctes complexes et conjuguées. Comme la deuxième équation de (T_2) est également à coefficients réels, pour que (T_2) possède une solution il est nécessaire que le polynôme $a_2 S_2^2 + a_1 S_2 + a_0$ divise $\alpha S_2^3 + \beta S_2^2 + \gamma S_2 + \delta$, mais nous avons:

$$\alpha S_2^3 + \beta S_2^2 + \gamma S_2 + \delta = \left[\frac{\alpha}{a_2} Z + \frac{1}{a_2}\left(\beta - a_1 \frac{\alpha}{a_2}\right)\right](a_2 S_2^2 + a_1 S_2 + a_0)$$
$$+ \left[\left(\gamma - a_0 \frac{\alpha}{a_2}\right) - \frac{a_1}{a_2}\left(\beta - a_1\frac{\alpha}{a_2}\right)\right] Z + \delta - \frac{a_0}{a_2}\left(\beta - a_1 \frac{\alpha}{a_2}\right).$$

Or

$$\delta - \frac{a_0}{a_2}\left(\beta - a_1\frac{\alpha}{a_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \delta a_2^2 - a_0(a_2\beta - a_1\alpha) = 0$$

et un calcul montre que

$$\delta a_2^2 - a_0(a_2\beta - a_1\alpha) = -\frac{1}{4k_2^{20}} + O\left(\frac{1}{k_2^{19}}\right) + o(1).$$

De ce fait pour k_1 près de 1 et k_2 près de zéro, le polynôme $a_2 S_2^2 + a_1 S_2 + a_0$ ne divise pas $\alpha S_2^3 + \beta S_2^2 + \gamma S_2 + \delta = 0$, ce qui montre le lemme 3.

Démonstration de la proposition. Nous pouvons maintenant montrer que le système initial (T) possède une solution S_n, S_{n-1}, S_{n-2} vérifiant les conditions $(*)$ dans le cas où $n = 3$ (ceci pour k_1 près de 1 et k_2 près de zéro). En effet supposons pour commencer $b_i = -\bar{b}_j$, avec $b_i \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Dans l'expression donnant g nous pourrions faire deux simplifications ce qui nous ramène au cas $n = 1$, mais le lemme 2 montre qu'il n'y a pas de solutions.

Si nous supposons maintenant $b_j \in i\mathbb{R}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$ nous pourrions simplifier g ce qui nous ramènerait au cas $n = 2$ et en ce cas nous concluons avec le lemme 3.

Supposons maintenant $n \geq 4$; les solutions S_n, S_{n-1} et S_{n-2} du système (T) sont localement des fonctions holomorphes des variables complexes $S_{n-3}, \ldots, S_1$ et nous déduisons donc que les solutions $b_1, \ldots, b_n$ sont également localement des fonctions holomorphes des variables complexes $S_{n-3}, \ldots, S_1$, ainsi si b_i et b_j ne sont pas constantes $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ nous ne pourrions pas avoir

$$b_i(S_{n-3}, \ldots, S_1) = -\overline{b_j(S_{n-3}, \ldots, S_1)}$$

pour tout $S_{n-3}, \ldots, S_1$ appartenant à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-3}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe des solutions S_n, S_{n-1}, S_{n-2} de (T) telles que parmi les complexes $b_1(S_{n-3},\dots,S_1),\dots,b_n(S_{n-3},\dots,S_1)$ obtenus à partir de $S_{n-3},\dots,S_1$ il n'y a pas deux termes constants $b_i, b_j, i \neq j$ vérifiant

$$\text{cas} \quad (1): \quad b_i = -\bar{b}_j = \text{ constante},$$

et il n'y a pas de termes constants b_j imaginaire pure

$$\text{cas} \ (2): \quad b_j \in i\mathbb{R}, \ b_j = \text{constante}.$$

Supposons que l'un des complexes b obtenus à partir des $S_n,\dots,S_1$ soit constant, pour tout $S_1,\dots S_{n-3}$ appartenant à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-3}$; nous avons

$$S_n(S_{n-3},\dots,S_1) - bS_{n-1}(S_{n-3},\dots,S_1) + \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0. \quad (F_1)$$

Remarquons que si $(S_n,\dots,S_1)$ est solution du système initial (T), comme celui ci n'a que des coefficients réels, $\bar{S}_n,\dots,\bar{S}_1$ est également solution de (T), de ce fait par continuité des solutions S_n, S_{n-1}, S_{n-2} en fonction des paramètres $S_{n-3},\dots,S_1$ nous déduisons que:

$$\bar{S}_n(\bar{S}_{n-3},\dots,\bar{S}_1) - b\bar{S}_{n-1}(\bar{S}_{n-3},\dots,\bar{S}_1) + \cdots + (-1)^n b^n \bar{S}_1 = 0$$

ce qui est équivalent à:

$$S_n(S_{n-3},\dots,S-1) - \bar{b}S_{n-1}(S_{n-3},\dots,S_1) + \cdots + (-1)^n \bar{b}^n S_1 = 0 \quad (F_2)$$

Considérons pour commencer le cas (1), supposons donc $b_1 = -\bar{b}_2$. Nous allons distinguer deux cas:

$$\text{(i)} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\},$$
$$\text{(ii)} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

(Nous pouvons supposer $b_1, b_2 \notin i\mathbb{R}$, car $b_1 \in i\mathbb{R}$ ramène au cas (2).) Au cas (i), $S_n,\dots,S_1$ vérifient les deux équations $(F_1),(F_2)$ avec b et $\bar{b}$ successivement (on a $b = -\bar{b}_1 = b_2$).

Nous avons de ce fait les quatre équations:

$$S_n - bS_{n-1} + b^2 S_{n-2} + \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0 \qquad (G_1)$$
$$S_n + bS_{n-1} + b^2 S_{n-2} + \cdots + b^n S_1 = 0 \qquad (G_2)$$
$$S_n - \bar{b}S_{n-1} + \bar{b}^2 S_{n-2} + \cdots + (-1)^n \bar{b}^n S_1 = 0 \qquad (G_3)$$
$$S_n + \bar{b}S_{n-1} + \bar{b}^2 S_{n-2} + \cdots + \bar{b}^n S_1 = 0 \qquad (G_4)$$

Nous déduisons:

$$S_{n-1} + b^2 S_{n-3} + b^4 S_{n-5} + \cdots = 0 \qquad ((G_2) - (G_1))$$
$$S_{n-1} + \bar{b}^2 S_{n-3} + \bar{b}^4 S_{n-5} + \cdots = 0 \qquad ((G_4) - (G_3))$$

puis

$$(b^2 - \bar{b}^2) S_{n-3} + (b^4 - \bar{b}^4) S_{n-5} + \cdots = 0 \quad ((G_2) - (G_1)) - ((G_4) - (G_3))$$

or $b^2 - \bar{b}^2 \neq 0$ car $b \in \mathbb{C} - \mathbb{R} - i\mathbb{R}$, nous obtenons donc une relation entre $(S_{n-3}, \ldots, S_1)$ ce qui est absurde car ces variables peuvent être choisies indépendamment, ce qui clot le cas (i).

Considérons le cas (ii), $S_n, \ldots, S_1$ vérifient l'équation (F_1) avec $b = b_1$ et $b = b_2 = -b_1$ successivement, nous avons donc

$$S_n - bS_{n-1} + b^2 S_{n-2} + \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0 \qquad (H_1)$$
$$S_n + bS_{n-1} + b^2 S_{n-2} + \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0 \qquad (H_2)$$

d'où

$$S_n + b^2 S_{n-2} + b^4 S_{n-4} \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0 \qquad ((H_1) + (H_2))$$

$$S_{n-1} = -b^2 S_{n-3} + b^4 S_{n-5} + \ldots . \qquad ((H_2) - (H_1))$$

S_{n-1} est donc déterminé en fonction de $(S_{n-3}, \ldots, S_1)$, il n'y a donc qu'une solution S_{n-1} donnée par $(H_1) - (H_2)$. Mais S_n, S_{n-1} sont aussi solutions des équations $(E_1), (E_2)$ définies plus haut et inversement toutes les solutions de $(E_1), (E_2)$ sont solutions du système initial (T). Nous avons vu de plus que (E_2) définit une surface de Riemann M et que (E_1) est une équation sur M du type $F(S_n, S_{n_1}) = 0$, où F est une fonction méromorphe sur M. Il n'est pas dificile de voir que F est une fonction de degré 12 sur M, ainsi le système (E_1, E_2) admet exactement 12 solutions $(Z_j, Y_j), j = 1, \ldots, 12$ avec multiplicité. Par ailleurs la projection $(S_n, S_{n-1}) \to S_{n-1}$ de M sur $S^2 \cong \mathbb{C} - \{\infty\}$ est une application de degré trois. Comme nous avons remarqué que S_{n-1} est uniquement determiné, l'équation (E_2) n'a que trois solutions avec multiplicité, ce qui contredit le fait que le système $((E_1), (E_2))$ possède 12 solutions. Ce qui clot la discussion du cas (1).

Considérons le cas (2), supposons donc $b_1 \in i\mathbb{R}$, là encore nous distinguons deux cas:

(i) $b_1 \neq 0$;

(ii) $b_1 = 0$

.

Au cas $b_1 \neq 0$, les équations (F_1) et (F_2) donnent:

$$S_n - bS_{n_1} + b^2 S_{n_2} - \cdots + (-1)^n b^n S_1 = 0 \qquad (F_1)$$

$$S_n + bS_{n_1} + b^2 S_{n_2} + \cdots + b^n S_1 = 0 \qquad (F_2)$$

et nous concluons de manière analogue au cas (ii) du cas (1).

Au cas $b_1 = 0$, pour tout $(S_{n-3}, \ldots, S_1)$ appartenant à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-3}$, les solutions (S_n, S_{n-1}, S_{n-2}) du système initial (T) vérifient $S_n = 0$ ainsi S_n est uniquement determiné et nous concluons comme précédemment au cas (1).

Appendice

Démonstration du Lemme 1. Nous allons d'abord montrer les estimations des intégrales I_n. Pour tout entier n nous avons:

$$I_n = \int_1^{1/k_1} \frac{z^n}{\sqrt{(z+1)(1+k_1 z)(1-k_2^2 z^2)}} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(1-k_1 z)}};$$

en posant

$$f(z) = \frac{z^n}{\sqrt{(z+1)(1+k_1 z)(1-k_2^2 z^2)}}$$

nous avons:

$$I_n = f(c_{k_1}) \int_1^{1/k_1} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(1-k_1 z)}}$$

avec $1 < c_{k_1} < 1/k_1$, donc

$$I_n = f(c_{k_1}) \frac{\pi}{\sqrt{k_1}},$$

car

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} = \pi \qquad \textit{pour} \;\; a < b.$$

Clairement

$$\lim_{k_1\to 1} f(c_{k_1}) = \frac{1}{2\sqrt{1-k_2^2}},$$

d'où

$$I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k_2^2}} + o(1).$$

Par ailleurs pour tout entier n

$$\frac{1}{k_1-1}(I_{2n+1}-I_1) =$$

$$= \frac{1}{k_1-1}\int_1^{1/k_1} \frac{z^{2n+1}-z}{\sqrt{(z+1)(1+k_1 z)(1-k_2^2 z^2)}} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(1-k_1 z)}},$$

donc

$$\frac{1}{k_1-1}(I_{2n+1}-I_1) = \frac{1}{k_1-1}\int_1^{1/k_1} \frac{z\left(\sum_{p=0}^{n-1} z^{2p}\right)\sqrt{z+1}}{\sqrt{(1+k_1 z)(1-k_2^2 z^2)}}\sqrt{\frac{z-1}{1-k_1 z}}\,dz;$$

ainsi

$$\frac{1}{k_1-1}(I_{2n+1}-I_1) = \frac{g(c_{k_1})}{\sqrt{k_1}(k_1-1)}\int_1^{1/k_1}\sqrt{\frac{z-1}{1/k_1 - z}}\,dz$$

avec

$$g(z) = \frac{z\left(\sum_{p=0}^{n-1} z^{2p}\right)\sqrt{z+1}}{\sqrt{(1+k_1 z)(1-k_2^2 z^2}} \qquad et \qquad 1 < c_{k_1} < 1/k_1,$$

or

$$\int_1^{1/k_1}\sqrt{\frac{z-1}{1/k_1 - z}}\,dz = \frac{\pi(1-k_1)}{2k_1},$$

donc, nous concluons que pour tout entier n nous avons

$$I_{2n+1} = I_1 + O(k_1 - 1).$$

Pour I'_n nous avons:

$$(I'_{2n} - I'_0) = \int_{1/k_1}^{1/k_2} \frac{z^{2n}-1}{\sqrt{(z^2-1)(k_1^2 z^2 - 1)(1-k_2^2 z^2)}}\,dz,$$

$$(I'_{2n} - I'_0) = \int_{1/k_1}^{1/k_2} \frac{\left(\sum_{p=0}^{n-1} z^{2p}\right)\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{(k_1^2z^2-1)(1-k_2^2z^2)}}\, dz,$$

puis, pour tout entier n,

$$\lim_{k_1\to 1}(I'_{2n} - I'_0) = \int_{1}^{1/k_2} \frac{\left(\sum_{p=0}^{n-1} z^{2p}\right)}{\sqrt{1-k_2^2z^2}}\, dz,$$

ainsi,

$$I'_{2n} = I'_0 + \int_{1}^{1/k_2} \frac{\left(\sum_{p=0}^{n-1} z^{2p}\right)}{\sqrt{1-k_2^2z^2}}\, dz + o(1).$$

De plus

$$I'_0 = \int_{1/k_1}^{1/k_2} \frac{1}{\sqrt{(z^2-1)(1+k_1z)(1+k_2z)}} \frac{dz}{\sqrt{(k_1z-1)(1-k_2z)}}.$$

La fonction

$$h(z) = \sqrt{(z^2-1)(1+k_1z)(1+k_2z)},$$

est croissante sur $]1/k_1, 1/k_2[$ et nous avons donc:

$$0 \leq I'_0 \leq \frac{k_1}{\sqrt{2(1+k_2/k_1)(1-k_1^2)}} \int_{1/k_1}^{1/k_2} \frac{dz}{\sqrt{(k_1z-1)(1-k_2z)}}.$$

Comme la dernière intégrale est égale à $\pi\sqrt{k_1/k_2}$, nous déduisons:

$$O(k_1-1)I'_0 = o(1).$$

Nous montrons de la même manière les formules analogues pour les intégrales I''_n.

Références.

[1] A. A. de Barros. *Complete nonorientable minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *with finite total curvature,* An. Acad. Bras. Cienc. 59 (1987), 141-143.

[2] T. Ishihara. *Complete Moebius strips minimally immersed in* $\mathbb{R}^3$, (preprint).

[3] T. Ishihara. *Complete nonorientable minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, (preprint).

[4] W.Meeks. *The classification of complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *with total curvature greater than* -8π, Duke Math. J. (1981), 523-535.

[5] M.E.G.G. Oliveira. *Some new examples of nonorientable minimal surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 629-635.

[6] E. Toubiana. *Surfaces minimales non orientables de genre quelconque*, (preprint).

[7] S. Zhang. *On complete minimal immersions* $X : RP^2 - \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ *with total curvature* -10π, Lecture Notes in Mathematics, 1369, Springer,Berlin-New York, 1989.

M. Elisa G. G. de Oliveira
Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
C. U. Armando de S. Oliveira
Caixa Postal 20570 (Agência Iguatemi)
01498, São Paulo
Brasil

Eric Toubiana
Université De Bourgogne
Laboratoire de Topologie
Département de Mathématiques
B. P. 138
21004, Dijon Cedex
France